Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра фундаментальної математики

"ЗАТВЕРДЖУЮ"
Декан факультету
математики і інформатики

Григорій ЖОЛТКЕВИЧ

"29" серпня 2024 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Комплексний аналіз

рівень вищої освіти перший (бакалаврський) рівень

галузь знань 11– Математика та статистика

спеціальність 113 – Прикладна математика

освітня програма «Прикладна математика»

спеціалізація

вид дисципліни обов`язкова

факультет математики і інформатики

2024 / 2025 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження Вченою радою факультету математики і інформатики

"27" серпня 2024 року, протокол № 8

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ:
Фаворов Сергій Юрійович,доктор фіз.-мат. наук, професор, професор закладу вищої освіти кафедри фундаментальної математики.

Програму схвалено на засіданні кафедри фундаментальної математики
Протокол від "26" серпня 2024 року № 1

В. о. завідувача кафедри фундаментальної математики

Сергій ГЕФТЕР

Програму погоджено з гарантом
освітньо-професійної програми «Прикладна математика»

Гарант освітньо-професійної програми «Прикладна математика»

Сергій ПОСЛАВСЬКИЙ

Програму погоджено науково-методичною комісією
факультету математики і інформатики

Протокол від "27" серпня 2024 року № 1

Голова науково-методичної комісії факультету математики і інформатики

Євген МЕНЯЙЛОВ

ВСТУП

Програма навчальної дисципліни **«Комплексний аналіз»** складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки **бакалавра**
спеціальності **113–Прикладна математика**

1. Опис навчальної дисципліни

1.1. Мета викладання навчальної дисципліни полягає у наданні майбутнім спеціалістам знань у галузі сучасного комплексного аналізу.
1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни є навчання студентів теоретичним основам і методам комплексного аналізу та застосуванню цих методів у інших математичних дисциплінах.
  1.2.1. Формування наступних інтегральної та загальних компетентностей:
    ІК01.Здатність розв’язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми прикладної математики у професійній діяльності або у процесі навчання, що передбачає застосування математичних теорій та методів і характеризується комплексністю та невизначеністю умов.
    ЗК06. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
  1.2.2. Формування наступних фахових компетентностей:
    ФК01. Здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем.
    ФК02. Здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі.
    ФК17. Здатність розуміти математичні доведення, запропоновувати оригінальні доведення, встановлювати їх правильність і отримувати висновки.
1.3. Кількість кредитів – 7
1.4. Загальна кількість годин – 210

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
Обов’язкова	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
3-й	
Семестр	
5-й, 6-й	
Лекції	
64 год.	
Практичні, семінарські заняття	
48 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
98 год.	
у тому числі індивідуальні завдання	
20 год.	

1.6. Заплановані результати навчання:

Знати:

- означення експоненти,логарифму,тригонометричних функцій комплексної змінної;
- різні похідні для комплекснозначних функцій, їх геометричний зміст;
- означення голоморфних функцій;
- зв'язок між гармонічними та голоморфними функціями;
- означення інтегралу вздовж кривої;
- теорему Коші; інтегральну формулу Коші;
- розвинення основних голоморфних функцій у ряди Тейлора та Лорана;
- нерівність Коші, теорему Ліувілля;
- теореми єдності для голоморфних функцій;
- класифікацію ізольованих особливостей голоморфної функції;
- принцип максимуму модуля для голоморфних функцій;
- означення особливих точок; визначення характеру ізольованих особливих точок;
- означення лишків у скінченних та нескінченних ізольованих особливих точках;
- означення цілих та мероморфних функцій;
- розвинення Міттаг-Леффлера для мероморфних функцій;
- теореми Веєрштрасса про розвинення цілих функцій у нескінченний добуток;
- геометричний зміст модулю та аргументу голоморфної функції;
- означення конформного відображення;
- зв'язок між конформними та голоморфними відображеннями;
- основні конформні відображення та їх властивості: дробово-лінійне, z^n, $\sqrt[n]{z}$, e^z, $\ln z$, функція Жуковського та обернена до неї;
- принцип аргументу, теорему Руше та теорему про збереження області;
- принцип симетрії Рімана-Шварца.

Уміти :

- знаходити логарифм та комплексний степінь комплексного числа;
- перевіряти виконання умов Коші-Рімана;
- відновлювати голоморфну функцію за заданою дійсною частиною;
- знаходити розвинення голоморфних функцій у ряди Тейлора та Лорана;
- проводити класифікацію ізольованих особливостей голоморфних функцій;
- обчислювати лишки та рахувати криволінійні інтеграли за допомогою лишків;
- обчислювати основні типи невласних інтегралів за допомогою лишків;
- обчислювати деякі типи рядів за допомогою лишків;
- знаходити розвинення мероморфних функцій в ряди за головними частинами;
- будувати конформні відображення однозв'язних областей за допомогою основних конформних відображень: дробово-лінійного, z^{n}, $\sqrt[\mathrm{n}]{\mathrm{z}}$, e^{z}, $\ln \mathrm{z}$, функції Жуковського;
- користуватися принципом симетрії Рімана-Шварца для побудови конформних відображень деяких областей.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні досягти таких програмних результатів навчання:

РН02. Володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, чисельними методами.

РН21. Демонструвати розуміння загальних принципів побудови математичних теорій, основних понять логіки, уміти формулювати та доводити математичні твердження.

РН22. Уміти отримувати змістовні висновки, наводити та аналізувати приклади і контрприклади, перевіряти і обґрунтовувати правильність застосованих міркувань і отриманих розв'язків.

2. Тематичний план навчальної дисципліни.

Розділ 1. Основні поняття комплексного аналізу.

Тема 1. Комплексна площина та функції комплексної змінної.

1. Комплексні числа, дії з комплексними числами.
2. Означення функцій z^n, $\sqrt[n]{z}$, e^z, $\ln z$, тригонометричних функцій комплексної змінної
3. Топологія комплексної площини, розширена комплексна площина, стереографічна проєкція.
4. Функції комплексної змінної, криві, області.

Тема 2. Диференційованість функцій, голоморфні та гармонічні функції

1. R-та C-диференційованість функцій комплексної змінної.
2. Умови Коші-Рімана.
3. Означення голоморфної функції.
4. Геометричний зміст модулю та аргументу голоморфної функції.
5. Гармонічні функції. Властивості гармонічних функцій.
6. Зв'язок гармонічних та голоморфних функцій. Відновлення голоморфної функції за заданою дійсною частиною.

Тема 3. Інтеграл від функції комплексної змінної та теорема Коші.

1. Означення інтегралу вздовж кривої та його властивості.
2. Зв'язок з криволінійними інтегралами.
3. Формула Ньютона-Лейбніца. Первісна.
4. Теорема Коші для трикутника.
5. Теорема Коші для замкненої кривої в однозв'язній області.
6. Теорема Коші для функції, неперервної в замкненій області.

Тема 4. Інтегральна формула Коші та її застосування

1. Інтегральна формула Коші.
2. Диференціювання інтегралу типу Коші.
3. Нескінченна диференційованість голоморфних функцій. Теорема Морери.
4. Теорема Веєрштрасса про рівномірно збіжну послідовність голоморфних функцій.
5. Степеневі ряди.
6. Розвинення голоморфної функції в степеневий ряд.
7. Нерівність Коші для коефіцієнтів степеневого ряду.
8. Теорема Ліувілля.

Розділ 2. Нулі, ізольовані особливості, лишки.

Тема 5. Нулі голоморфних функцій та безпосереднє аналітичне продовження.

1. Нулі голоморфних функцій

2. Перша теорема єдиності.
3. Теорема про те, що нулі не можуть згущатися.
4. Безпосереднє аналітичне продовження.
5. Особливості степеневого ряду на межі кола збіжності.

Тема 6. Ряд Лорана та ізольовані особливі точки.

1. Ряд Лорана, розвинення голоморфної функції в ряд Лорана.
2. Визначення характеру ізольованих особливих точок.
3. Теорема Сохоцького-Веєрштрасса.
4. Лишки. Обчислювання лишків.
5. Теореми Коші про лишки.

Тема 7. Застосування теореми Коші про лишки.

1. Обчислення інтегралів по замкненому контуру.
2. Лема Жордана
3. Обчислення інтегралів від тригонометричних функцій.
4. Обчислення невласних інтегралів.
5. Підсумовування рядів.

Розділ 3. Подальші властивості голоморфних функцій.

Тема 8. Геометричні принципи теорії функцій.

1. Принцип аргументу.
2. Теореми Руше та Гурвіца.
3. Основна теорема алгебри.
4. Принцип збереження області.
5. Однолисті функції.
6. Обернення степеневих рядів.
7. Принцип максимуму модуля голоморфної функції.
8. Лема Шварца.

Тема 9. Властивості цілих та мероморфних функцій.

1. Означення цілих та мероморфних функцій.
2. Раціональні функції.
3. Розвинення Міттаг-Леффлера для мероморфних функцій.
4. Метод Коші розвинення для мероморфних функцій.
5. Канонічний множник Веєрштрасса.
6. Нескінченний добуток та його властивості.
7. Теореми Веєрштрасса про розвинення цілих функцій у нескінченний добуток.

Розділ 4. Конформні відображення та їх застосування.

Тема 10. Елементарні конформні відображення.

1. Означення конформного відображення.
2. Необхідні та достатні умови конформності.

3. Дробово-лінійні відображення та їх властивості.
4. Функції z^n, $\sqrt[n]{z}$ та їх властивості.
5. Функції e^z, $\ln z$ та їх властивості.
6. Властивості функції Жуковського та оберненої до неї.
7. Побудова конформних відображень однозв'язних областей за допомогою основних функцій: дробово-лінійної, z^n, $\sqrt[n]{z}$, e^z, $\ln z$, функції Жуковського та оберненої до неї.

Тема 11. Основна теорема теорії конформних відображень.

1. Конформні автоморфізми та ізоморфізми.
2. Зв'язок між конформністю та голоморфністю для відображень.
3. Класи конформно-еквівалентних областей.
4. Теорема Пенлеве про зникнення особливостей.
5. Принцип симетрії Рімана-Шварца.

Тема 12. Задача Діріхле та її застосування в теорії конформних відображень

1. Задача Діріхле для круга. Формула Пуассона.
2. Задача Діріхле для однозв'язних областей.
3. Розв'язання задачі Діріхле для верхньої напівплощини.
4. Формула Крістофеля-Шварца.

3. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	Денна форма						Заочна форма					
	усього	У тому числі					усього	У тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.		л	п	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5 семестр												
Розділ 1. Основні поняття комплексного аналізу.												
Тема 1. Комплексна площина та функції комплексної змінної.	18	6	2			10						
Тема 2. Диференційованість функцій, голоморфні та гармонічні функції	16	4	2			10						
Тема 3. Інтеграл від функції комплексної змінної та теорема Коші.	16	6	2			8						
Тема 4. Інтегральна формула Коші та її застосування	12	6	2			4						

Разом за розділом 1	62	22	8			32						
Розділ 2. Нулі, ізольовані особливості, лишки.												
Тема 5. Нулі голоморфних функцій та безпосереднє аналітичне продовження	10	4	2			4						
Тема 6. Ряд Лорана та ізольовані особливі точки.	14	6	2			6						
Контрольна робота	2		2									
Колоквіум	2		2									
6 семестр												
Тема 7. Застосування теореми Коші про лишки.	38	6	12			20						
Разом за розділом 2	66	16	20			30						
Розділ 3.Подальші властивості голоморфних функцій.												
Тема 8. Геометричні принципи теорії функцій	12	4	2			6						
Тема 9. Властивості цілих та мероморфних функцій.	12	6	2			4						
Разом за розділом 3	24	10	4			10						
Розділ 4. Конформні відображення та їх застосування.												
Тема10. Елементарні конформні відображення.	34	6	8			20						
Тема 11. Основна теорема теорії конформних відображень	12	6	4			2						
Тема 12. Задача Діріхле та її застосування в теорії конформних відображень	10	4	2			4						
Контрольна робота	2		2									
Разом за розділом 4	58	16	16			26						
Усього годин	**210**	**64**	**48**			**98**						

4. Теми семінарських (практичних, лабораторних)занять

Семестр 5

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Комплексна площина та функції комплексної змінної.	2
2	Диференційованість функцій, голоморфні та гармонічні функції.	2
3	Інтеграл від функції комплексної змінної та теорема Коші	2
4	Інтегральна формула Коші та її застосування	2
5	Нулі голоморфних функцій та безпосереднє аналітичне продовження.	2
6	Ряд Лорана та ізольовані особливі точки.	2
7	Контрольна робота	2
8	Колоквіум	2
	Разом	**16**

Семестр 6

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Застосування теореми Коші про лишки	12
2	Геометричні принципи теорії функцій	2
3	Властивості цілих та мероморфних функцій	2
4	Елементарні конформні відображення	8
5	Основна теорема теорії конформних відображень	4
6	Задача Діріхле та її застосування в теорії конформних відображень	2
7	Контрольна робота	2
	Разом	**32**

5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
Робота над розрахунково-графічними роботами та над домашніми завданнями, що відповідають темам практичних занять:		
1	Комплексна площина та функції комплексної змінної.	10
2	Диференційованість функцій, голоморфні та гармонічні функції (виконання розрахунково-графічної роботи)	10
3	Інтеграл від функції комплексної змінної та теорема Коші.	8
4	Інтегральна формула Коші та її застосування (виконання домашнього завдання).	4
5	Нулі голоморфних функцій та безпосереднє аналітичне продовження.	4
6	Ряд Лорана та ізольовані особливі точки (виконання домашнього завдання).	6
7	Застосування теореми Коші про лишки (виконання домашнього завдання і розрахунково-графічної роботи).	20
8	Геометричні принципи теорії функцій (виконання домашнього завдання).	6
9	Властивості цілих та мероморфних функцій	4
10	Елементарні конформні відображення (виконання домашнього завдання)	20
11	Основна теорема теорії конформних відображень	2

12	Задача Діріхле та її застосування в теорії конформних відображень	4
	Разом	**98**

6. Індивідуальні завдання

5-й семестр – завдання на тему «Функції комплексної змінної, диференційованість».
6-й семестр – завдання на тему «Застосування теореми Коші про лишки».

7. Методи навчання

Використовуються пояснювально-ілюстративний (лекції і практичні заняття), репродуктивний (виконання домашніх завдань) і частково-пошуковий (контрольні роботи, індивідуальні завдання) методи.

8. Методи контролю

– Облік відвідування аудиторних занять.
– Перевірка виконання індивідуальних завдань (2) та контрольних робіт (2).
– Колоквіум.
– Підсумковий контроль: 5 семестр – залік, 6 семестр – екзамен.

9. Схема нарахування балів

Семестр 5

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання						Залік	Сума
Розділ 1, Теми 1-4	Розділ 2, Теми 5-6	Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Розрахунково-графічна робота	Колоквіум	Разом		
5	5	20	10	20	60	40	100

Семестр 6

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання						Екзамен	Сума
Розділ 2, Тема 7	Розділ 3, Теми 8-9	Розділ 4, Теми 10-12	Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Розрахунково-графічна робота	Разом		
5	5	10	20	20	60	40	100

Мінімальна кількість балів для допуску до складання підсумкового контролю програмою не передбачена.

Критерії оцінювання навчальних досягнень

Поточний контроль враховує активність під час практичних занять та правильність виконання домашніх завдань.

Контрольна робота у 5 семестрі включає завдання з розвинення функції в ряд Лорана та класифікації ізольованих особливих точок.

Контрольна робота у 6 семестрі на тему «Елементарні конформні відображення».

Включає задачі на знаходження дробово-лінійного відображення за заданими значеннями, застосування заданого відображення до заданої області на комплексній площині, знаходження конформного відображення, яке переводить задану область на комплексній площині в круг чи верхню напівплощину.

Кожна з робіт оцінюється максимум у 20 балів відповідно до правильності та повноти розв'язання.

Розрахунково-графічне завдання у 5 семестрі включає 5 задач, серед яких задачі на застосування умов Коші-Рімана, теореми про знаходження голоморфної функції за її дійсною (або уявною) частиною, знаходження значення функції комплексної змінної в деякій точці, розв'язання рівняння в комплексній площині.

Розрахунково-графічне завдання у 6 семестрі включає 5 задач на безпосереднє застосування леми Жордана, інтегрування тригонометричних функцій та інтегрування деяких типів невласних інтегралів.

Колоквіум передбачає письмову відповідь на два питання зі списку, який надається студентам. Питання включають теоретичний і практичний матеріал, який студенти вивчали протягом семестру. До кожного питання обов'язково наводити доведення, обґрунтування міркувань, пояснювальні приклади. Якщо теоретичний зміст питань не повністю розкритий або робота містить помилки, бал може бути знижений.

Екзаменаційний білет складається з двох теоретичних питань та однієї задачі. Кожне з теоретичних питань оцінюється максимум у 15 балів, задача – у 10 балів.

Максимальну кількість балів за відповідь на теоретичне питання можна отримати, якщо сформулювати та довести відповідні твердження, навести необхідні приклади. Якщо студент правильно описав ідею доведення, але не зміг до кінця привести відповідні викладки, то він отримує максимум 12 балів. У випадку, коли студент зробив помилки при формулюванні тверджень або не зміг пояснити ідею доведення чи навести приклади, він отримує максимум 5 балів.

Максимальна оцінка за задачу складає 10 балів. Незначні арифметичні помилки, які якісно не вплинули на результат, не впливають на кількість балів.

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка	
	5 семестр	*6 семестр*
90 – 100	зараховано	відмінно
70-89		добре
50-69		задовільно
1-49	не зараховано	незадовільно

10. Рекомендована література

Основна література

1. Комплексний аналіз. Приклади і задачі (за редакцією В.Г. Самойленка). КНУ ім. Т.Шевченка. – 2010.
2. Гольдберг А.А., Шеремета М.М., Заболоцький М.В, Скасків О.Б. Комплексний аналіз : Підручник. – Львів, Афіша, 2002. – 204 с.
3. Комплексний аналіз: навчальний посібник / П.В. Слюсарчук, Т.В. Боярищева, М.С. Герич, О.О. Погоріляк, О.О. Синявська, Г.І. Сливка-Тилищак, А.М. Тегза. – Ужгород:

2022. – 244 с.
4. Комплексний аналіз: підручник / Т.А.Мельник. – К. : ВПЦ «Київський університет», 2015. – 192.

Допоміжна література

1. Edward C. Titchmarsh. The Theory of Functions. Oxford University Press; 2nd edition, 1976.
2. M.L. Alfors. Complex analysis. N.J., “Kluver”, 1981.